矩阵的初等变换

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

矩阵的初等变换

先回顾消元法解线性方程组.

例子

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$$

解.

$$\xrightarrow[①\leftrightarrow②]{③/2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2① \\ ④-3①}]{②-2①} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ -3x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{②\times\frac{-1}{3}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 = 2 & ② \\ \dfrac{-4}{3}x_4 = 4 & ③ \\ 3x_4 = -9 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{③\times\frac{-3}{4}}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & ① \\ x_2-x_3+\dfrac{1}{3}x_4=2 & ② \\ x_4=-3 & ③ \\ x_4=-3 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{④-③}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & ① \\ x_2-x_3+\dfrac{1}{3}x_4=2 & ② \\ x_4=-3 & ③ \\ 0=0 & ④ \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 + 2x_3 = 4 + x_3 & ① \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_2 = x_3 + 3 & ② \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = -3 & ③ \end{cases}$ 其中 x_3 可取任意实数.

则

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

总结

操作:

1. $(i) \leftrightarrow (j)$
2. $k(i)$
3. $(i) + k(j)$

总结

操作:

1. ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ
2. kⓘ
3. ⓘ $+ k$ⓙ

三个操作均可逆, 不改变方程组的解:

1. 的逆: ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ
2. 的逆: ⓘ $\div k$
3. 的逆: ⓘ $- k$ⓙ.

注意到，三个操作只改变了系数矩阵和常数矩阵，并不改变未知数矩阵.

增广矩阵

定义

上述方程组的增广矩阵是指

$$B=(A\quad b)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}.$$

增广矩阵将会为讨论问题带来便利.

初等行 (列) 变换

上述三个对方程组的操作对应于以下矩阵的操作.

定义

矩阵的初等行变换是指以下操作:

1. 对换两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ (r=row);
2. 数乘某行, 记作 $r_i \times k$, $k \neq 0$;
3. 将一行的倍数加到另一行, 记作 $r_i + kr_j$.

类似定义初等列变换, 以 c 代表列. 它们统称为初等变换.

初等行 (列) 变换均可逆.

定义

1. 若矩阵 A 经过有限次初等行变换后可变成 B, 称 A 与 B 行等价, 记作 $A \overset{r}{\sim} B$
2. 若矩阵 A 经过有限次初等列变换后可变成 B, 称 A 与 B 列等价, 记作 $A \overset{c}{\sim} B$;
3. 若矩阵 A 经过有限次初等变换后可变成 B, 称 A 与 B 等价, 记作 $A \sim B$;

(行/列) 等价关系的性质:

1. (反射性) $A \sim A$;
2. (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
3. (传递性) 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

前述对方程的操作对应于增广矩阵的操作:

$$B \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 2r_1]{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{\substack{r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div \frac{-4}{3}]{r_4 \div 3} \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_3]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{array}\right).$$

定义

a. 非零矩阵若满足
   1. 非零行在零行的上面,
   2. 非零行的首非零元所在列在上一行 (若存在的话) 的首非零元所在列的右边,

   则称此矩阵为行阶梯形矩阵.

b. 若进一步，该矩阵满足
   1. 非零行的首非零元为 1,
   2. 首非零元所在的列的其它元均为 0,

则称其为行最简形矩阵.

例子

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$ 行阶梯形矩阵

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 2 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-\frac{2}{3}r_3]{r_2-\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ & 1 & -1 & 0 & 3 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$ 行最简形矩阵

若对矩阵进一步作初等列变换，则可以得到更简单的矩阵:

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_5-4c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\&1&-1&0&3\\&&&1&-3\\&&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{c_5-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&&1&-3\\&&&&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_5+3c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\&1&0&0&0\\&&&1&0\\&&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

特点: 左上角为某阶的单位阵，其余项为 0.

它称为原矩阵的标准形. 它是与原矩阵等价的矩阵中形式最简单的矩阵.

等价关系

我们定义了三个等价关系: $\overset{r}{\sim}$, $\overset{c}{\sim}$, $\sim$. 下面进一步描述这些等价关系.

定理

假设 $A, B \in M_{m\times n}$, 则

i $A \overset{r}{\sim} B \iff \exists m$ 阶可逆矩阵 P 使得 $PA = B$.

ii $A \overset{c}{\sim} B \iff \exists n$ 阶可逆矩阵 Q 使得 $AQ = B$.

iii $A \sim B \iff \exists m$ 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $PAQ = B$.

为了证明定理, 通过*初等矩阵*描述初等矩阵变换.

初等矩阵

定义

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- i $E(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或} c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} E$

ii $E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或} c_i \times k]{r_i \times k} E$

iii $E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或} c_j + kc_i]{r_i + kr_j} E$

初等变换与初等矩阵

命题

初等行变换等同于左乘初等矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$; 初等列变换等同于右乘 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$.

初等变换与初等矩阵

命题

初等行变换等同于左乘初等矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$; 初等列变换等同于右乘 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$.

以二阶矩阵示例说明以下事实:

- 交换第 i 行和第 j 行相当于左乘 $E(i,j)$;
- 用数 k 乘第 i 行相当于左乘 $E(i(k))$;
- 将第 j 行的 k 倍加到第 i 行相当于左乘 $E(ij(k))$.

初等变换与初等矩阵

命题

初等行变换等同于左乘初等矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$; 初等列变换等同于右乘 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$.

以二阶矩阵示例说明以下事实:

- 交换第 i 行和第 j 行相当于左乘 $E(i,j)$;
- 用数 k 乘第 i 行相当于左乘 $E(i(k))$;
- 将第 j 行的 k 倍加到第 i 行相当于左乘 $E(ij(k))$.

类似地,

- 交换第 i 列和第 j 列相当于右乘 $E(i,j)$;
- 用数 k 乘第 i 列相当于右乘 $E(i(k))$;
- 将第 i 列的 k 倍加到第 j 列相当于右乘 $E(ij(k))$.

初等矩阵均可逆, 且逆矩阵是一类型的初等矩阵:

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$;
- $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$.

初等矩阵均可逆, 且逆矩阵是一类型的初等矩阵:

- $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$;
- $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$;
- $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$.

命题

方阵 A 可逆当且仅当存在初等矩阵 $P_1, \ldots, P_l$ 使得 $A = P_1 \cdots P_l$.

证明.

$(\Longleftarrow)$ P_i 可逆. $(A^{-1} = ?)$
$(\Longrightarrow)$ 通过初等行变换将 A 化成行最简形 B, $B = E$. □

定理的证明

证明.

只证 (i), 其余类似.

- $(\Longrightarrow)$ $\exists$ 初等矩阵 $P_1, \ldots, P_l$ 使得 $(P_1 \cdots P_l)A = B$. 只需令 $P = P_1 \cdots P_l$.
- $(\Longleftarrow)$ 将 P 写成初等矩阵相乘的形式: $P = P_1 \cdots P_l$, 则 $P_1 \cdots P_l A = B$. (每左乘一次 P_i 都是进行一次初等行变换.)

$\square$

推论

方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Longleftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Longleftrightarrow A \sim E$.

初等矩阵的应用

我们将讨论一下几个应用:

- 变换矩阵;
- 判定可逆, 求逆;
- 解线性方程组.

问题

若已知有一系列初等变换将 A 变成 B, 定理告诉我们有可逆矩阵 P 使得 $PA = B$. 如何求 P?

问题

若已知有一系列初等变换将 A 变成 B, 定理告诉我们有可逆矩阵 P 使得 $PA=B$. 如何求 P?

策略. 利用增广矩阵 (A, E):

$$PA = B \Longleftrightarrow P(A, E) = (PA, PE) = (B, P),$$

增广矩阵的右半部分记录行操作.

问题

若已知有一系列初等变换将 A 变成 B, 定理告诉我们有可逆矩阵 P 使得 $PA = B$. 如何求 P?

策略. 利用增广矩阵 (A, E):

$$PA = B \Longleftrightarrow P(A, E) = (PA, PE) = (B, P),$$

增广矩阵的右半部分记录行操作.

例子

将 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 化成行最简形矩阵 F. 求一个可逆矩阵 P 使得 $PA = F$.

解

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3+10r_2]{r_2 \div (-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right).
$$

评述

可继续, 如 $r_2 + kr_3$ 不改变 F, 但 P 改变, P 不唯一.

判定, 求逆矩阵

这个方法还可以被用来判定方阵 A 是否可逆. 若可逆, 求逆. 步骤如下:

1. 取增广矩阵 (A, E)(分块矩阵);
2. 通过初等行变换将 A 化成行阶梯形矩阵; 如果非零行数等于 A 的阶数, 则 A 可逆;
3. 若 A 可逆 (依据推论,) 可进一步通过初等行变换将 A 化成 E: $P(A, E) = (E, P)$;
4. $A^{-1} = P$.

例子

$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. A 可逆? 若可逆, 求 A^{-1}.

解

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-9r_2]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 2 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times 2]{r_1-3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{r_2+\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{array}\right).$$

所以 A 与 E 等价, 则可逆. 而且, $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3\\ 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$(唯一确定). $\square$

解线性方程组

因此, 这也可以被用到解方程组上. 假设有矩阵方程

$$AX = B,$$

若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$.
注意, X 不一定只有一列.

解线性方程组

因此, 这也可以被用到解方程组上. 假设有矩阵方程

$$AX = B,$$

若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$.
注意, X 不一定只有一列.
利用增广矩阵 (A, B) 寻找 P 使得 $PA = E$, 则

$$P(A, B) = (PA, PB) = (E, PB) = (E, A^{-1}B).$$

例子

解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

例子

解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 则有 $Ax = b$.

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 + r_3}]{r_3 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

所以 $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是解.